NOMBRES RELATIFS EN ECRITURE FRACTIONNAIRE
FRACTIONS

I) Egalité de quotients :

1) Quotients égaux :

Propriété :

Un quotient de deux nombres relatifs ne change pas lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Soit a un nombre relatif

b un nombre relatif non nul

k un nombre relatif non nul

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Exemples :

$$\frac{8}{18} = \frac{8 \times 3}{18 \times 3} = \frac{24}{54}$$

$$\frac{8}{18} = \frac{8 \div 2}{18 \div 2} = \frac{4}{9}$$

Complétez

$$-\frac{12}{15} = -\frac{}{60}$$

$$-\frac{12}{15} = -\frac{4}{}$$

2) Egalité des produits en croix :

Propriété :

Soient a, b, c et d quatre nombres relatifs

b et d étant non nuls

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$

Si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Justification :

Soit a, b, c et d quatre nombres relatifs, b et d étant non nuls.

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ alors $\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{c\times b}{d\times b}$

On a deux fractions ayant le même dénominateur égales donc leurs numérateurs sont égaux donc $a \times d = c \times b$.

Si $a\times d=b\times c$ alors $\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{b\times c}{b\times d}$ et donc $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Exemples :

Les fractions suivantes sont-elles égales ? Justifier.

a) $\frac{198}{187}$ et $\frac{270}{255}$ b) $\frac{13}{14}$ et $\frac{167}{182}$ c) $-\frac{15}{49}$ et $\frac{45}{147}$

II) Addition et soustraction de fractions :

1) Règle 1 :

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de même dénominateur :

- On additionne (ou on soustrait) les numérateurs
- On garde le dénominateur commun

Soit a, b et c trois nombres relatifs, c étant non nul

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Exemples :

$$\frac{-9}{14}+\frac{3}{14}=\frac{-9+3}{14}=\frac{-6}{14}=-\frac{3}{7} \qquad \frac{2}{3}-\frac{4}{3}=\frac{2-4}{3}=-\frac{2}{3}$$

2) Règle 2 :

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur, on doit d'abord les réduire au même dénominateur.

Exemples :

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{5}$$

On recherche un multiple commun à 4 et 5 : 20

$\frac{3\times 5}{4\times 5}=\frac{15}{20}$ $\qquad$ $\frac{7\times 4}{5\times 4}=\frac{28}{20}$

On a alors $\frac{3}{4}+\frac{7}{5}=\frac{3\times 5}{4\times 5}+\frac{7\times 4}{5\times 4}=\frac{15}{20}+\frac{28}{20}=\frac{15+28}{20}=\frac{43}{20}$

Calculer $\frac{5}{6}-\frac{11}{4}$

Remarque :

Prendre, de préférence, le plus petit multiple commun ; cela évite d'avoir à simplifier le résultat.

III) Multiplication de fractions :

1) Régle1 :

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Soient a, b, c et d quatre nombres relatifs, b et d étant non nuls

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Exemple :

$$\frac{3}{4}\times\frac{(-5)}{6}=\frac{3\times(-5)}{4\times 6}=\frac{-15}{24}$$

2) Cas particulier :

Soient a, b et c trois nombres relatifs, c étant non nul

$$a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$$

Justification :

Soient a, b et c trois nombres relatifs, c étant non nul

$$a \times \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{1 \times c} = \frac{a \times b}{c}$$

Exemple :

$$5 \times \frac{(-2)}{11} = \frac{5 \times (-2)}{11} = \frac{-10}{11}$$

IV) Division de fractions :

1) Inverse d'un nombre relatif non nul :

a) Définition :

Deux nombres relatifs sont inverses lorsque leur produit est égal à 1.

Exemples :

$5 \times 0{,}2 = 1$ donc 0,2 est l'inverse de 5 ou 5 est l'inverse de 0,2.

$-10 \times (-0{,}1) = 1$ donc $-0{,}1$ est l'inverse de -10.

$4 \times (-0{,}25) = -1 \neq 1$ donc $-0{,}25$ n'est pas l'inverse de 4.

Remarque :

Il n'existe aucun nombre qui, multiplié par 0, donne 1 donc 0 n'a pas d'inverse.

b) Activité :

c) Propriété 1:

Soit a un nombre relatif non nul. L'inverse de a est $\frac{1}{a}$.

Justification :

Soit a un nombre relatif non nul

$$a\times\frac{1}{a}=\frac{a\times1}{a}=\frac{a}{a}=1$$

Exemples :

L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$.

L'inverse de -7 est $\frac{1}{-7}=-\frac{1}{7}$.

Remarque :

Il ne faut pas confondre inverse et opposé.

L'opposé de 5 est .

L'inverse de 5 est .

d) Propriété 2:

Soit a et b deux nombres relatifs non nuls. L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

Justification :

Soit a et b deux nombres relatifs non nuls

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{a\times b}{b\times a}=1$$

Exemples :

L'inverse de $\frac{5}{4}$ est $\frac{4}{5}$.

L'inverse de $-\frac{2}{7}$ est $-\frac{7}{2}$.

2) Division de fractions:

a) Propriété 1 :

Diviser par un nombre relatif non nul revient à multiplier par son inverse.

Soit a et b deux nombres relatifs, b étant non nul.

$$a : b=\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$$

Exemple:

$4:11=\frac{4}{11}=4\times\frac{1}{11}$

$\frac{\frac{4}{5}}{3}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{15}$

b) Propriété 2 :

Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Exemples :

$-5:\left(\frac{2}{3}\right)=$

$8:\left(\frac{7}{4}\right)=$

c) Cas particulier:

Soit a, b, c et d quatre nombres relatifs, b ,c et d étant non nuls.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

Exemples :

$\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{8}{11}}=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{11}{8}\right)=-\frac{33}{16}$

$\frac{9}{10}:\frac{5}{6}=\frac{9}{10}\times\frac{6}{5}=\frac{54}{50}=\frac{27}{25}$

V) Schéma récapitulatif :

VI) Application des fractions au ratio :

1) Ratio de deux nombres :

a) Définition :

On dit que deux nombres a et b sont dans le ratio $2 : 3$ si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$.

b) Exemples :

1) Les nombres 4 et 5 sont-ils dans le ratio 3:4 ? Justifier.
2) Les nombres 12 et 36 sont-ils dans le ratio 9:27 ? Justifier.
3) Déterminer le nombre a tel que a et 3 soient dans le ratio 4:10.

c) Méthode :

Recherchons deux nombres a et b qui sont dans le ratio 4:7 tels que leur somme soit égale à 143.

Calculons $4 + 7 = 11$.

$$a = 143 \times \frac{4}{11} = \frac{143 \times 4}{11} = \frac{572}{11} = 52$$
$$b = 143 \times \frac{7}{11} = \frac{143 \times 7}{11} = \frac{1001}{11} = 91$$

d) Exemple :

Déterminer la longueur et la largeur, dans le ratio 5:9, d'un rectangle dont le périmètre est égale 98 m.

2) Ratio de trois nombres :

a) Définition :

On dit que trois nombres a, b et c sont dans le ratio $2 : 3 : 7$

si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$.

b) Exemple :

Déterminer les mesures des angles d'un triangle, dans le ratio 3:5:7.