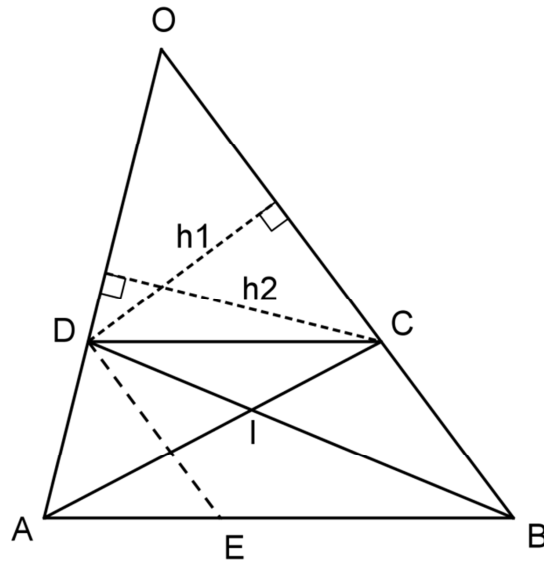


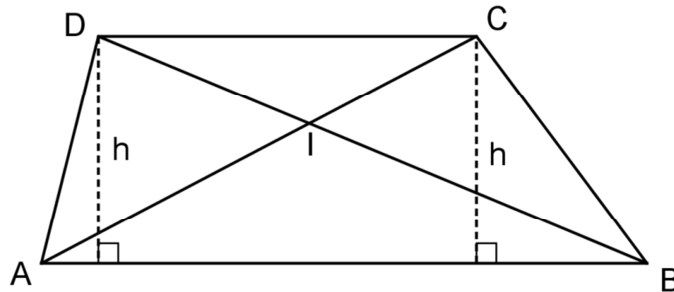
Démonstration du théorème de Thalès



On considère la figure ci-dessus. Les droites (DC) et (AB) sont parallèles.

Partie 1 :

Dans un premier temps, considérons le trapèze ABCD. On appelle h la hauteur de ce trapèze.



$$\text{Aire}(ABD) = \frac{h \times AB}{2} \quad \text{et} \quad \text{Aire}(ABC) = \frac{h \times AB}{2} \quad \text{donc} \quad \text{Aire}(ABD) = \text{Aire}(ABC).$$

$$\text{Or} \quad \text{Aire}(ABD) = \text{Aire}(ADI) + \text{Aire}(AIB)$$

$$\text{Aire}(ABC) = \text{Aire}(BIC) + \text{Aire}(AIB)$$

$$\text{Donc} \quad \text{Aire}(ADI) + \text{Aire}(AIB) = \text{Aire}(BIC) + \text{Aire}(AIB)$$

$$\text{D'où} \quad \text{Aire}(ADI) = \text{Aire}(BIC)$$

Partie 2 :

Dans le triangle ODC, h_1 est la hauteur issue du point D et h_2 est la hauteur issue du point C.

$$\text{Aire(ODC)} = \frac{OD \times h_2}{2} \quad \text{et} \quad \text{Aire(OCA)} = \frac{OA \times h_2}{2}$$

$$\text{Donc} \quad \frac{\text{Aire(ODC)}}{\text{Aire(OCA)}} = \frac{\frac{OD \times h_2}{2}}{\frac{OA \times h_2}{2}} = \frac{OD \times h_2}{2} \times \frac{2}{OA \times h_2} = \frac{OD}{OA}$$

$$\text{Aire(ODC)} = \frac{OC \times h_1}{2} \quad \text{et} \quad \text{Aire(ODB)} = \frac{OB \times h_1}{2}$$

$$\text{Donc} \quad \frac{\text{Aire(ODC)}}{\text{Aire(ODB)}} = \frac{\frac{OC \times h_1}{2}}{\frac{OB \times h_1}{2}} = \frac{OC \times h_1}{2} \times \frac{2}{OB \times h_1} = \frac{OC}{OB}$$

Or

$$\text{Aire(ODB)} = \text{Aire(ODIC)} + \text{Aire(BIC)} = \text{Aire(ODIC)} + \text{Aire(ADI)} = \text{Aire(OCA)}$$

$$\text{Donc} \quad \frac{\text{Aire(ODC)}}{\text{Aire(OCA)}} = \frac{\text{Aire(ODC)}}{\text{Aire(ODB)}} \quad \text{et} \quad \frac{OD}{OA} = \frac{OC}{OB} .$$

Partie 3 :

Le point E est le point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par D et de la droite (AB).

On sait que DCBE est quadrilatère
(DC)//(BE) et (DE)//(CB)

Or si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles alors c'est un parallélogramme.
donc DCBE est un parallélogramme.

On sait que DCBE est un parallélogramme

Or un parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur.
donc DC = EB .

D'après la partie 2, comme (DE) et (BC) sont parallèles.

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad \frac{AE}{AB} &= \frac{AD}{AO} & 1 - \frac{EB}{AB} &= 1 - \frac{OD}{AO} \\ \frac{AB - EB}{AB} &= \frac{AO - OD}{AO} & \frac{EB}{AB} &= \frac{OD}{AO} \\ \frac{AB}{AB} - \frac{EB}{AB} &= \frac{AO}{AO} - \frac{OD}{AO} & \frac{DC}{AB} &= \frac{OD}{OA} \left(= \frac{OC}{OB} \right) \end{aligned}$$