SPHERE, REPERAGE DANS L'ESPACE ET CALCUL DE VOLUMES

I) Activité :

1) Visionnage de la vidéo

2) Questionnaire :

a) Quel est le point commun entre une sphère et une boule ?

b) Quelle est la principale différence entre une sphère et une boule ?

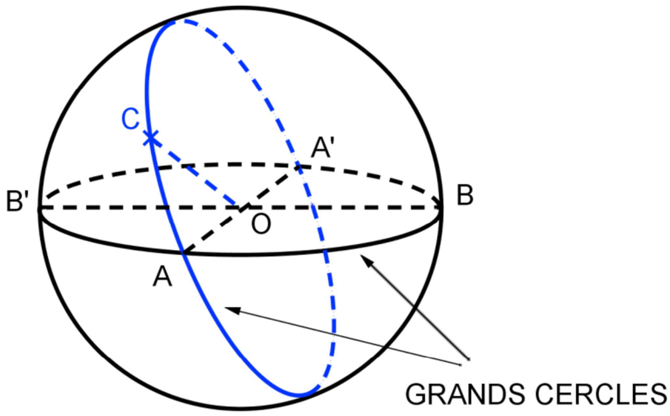
c) Quelles peuvent êtres les diverses sections d'une sphère par un plan ?

d) Quelle est la formule qui donne le volume d'une boule ?

II) La sphère :

1) Définition :

Une sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = R$.



Une sphère peut-être représentée comme ci-dessus :

Les segments [AA'] et [BB'] sont **des diamètres de la sphère.**
On dit que les points A et A' **sont diamétralement opposés.**

Les cercles de centre O et de rayon R sont appelés **grands cercles.**

Les points appartenant à une sphère sont représentés sur des grands cercles : par exemple le point C.

[OB] et [OC] sont des rayons de la sphère donc OB = OC.
Dans l'espace ces segments ont donc même mesure mais ils sont représentés en perspective par des segments de différentes longueurs.

Remarque :
Lorsqu'on considère le solide creux ou lorsqu'on considère la surface d'un solide plein, on parle de sphère.

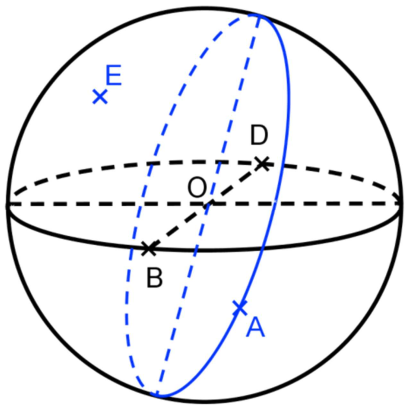
Lorsqu'on considère le solide plein, on parle alors de boule.
La boule de centre O et de rayon R est donc l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leq R$.

Citer des exemples de sphère.

Citer des exemples de boule.

Exemple :

Sur la sphère ci-dessous, on sait que $OA = 1{,}5\,\text{cm}$.



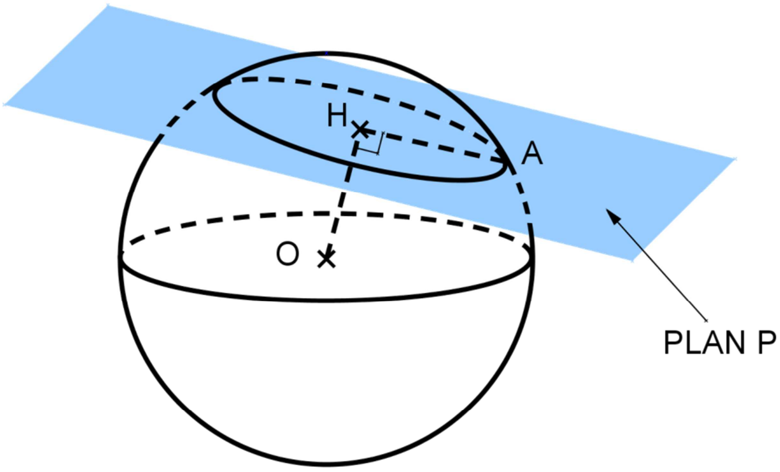
a) Déterminer, si possible, les longueurs OD, BD et OE.

b) Quelle est la nature du triangle ABO ? Justifier.

2) Section d'une sphère par un plan :

a) Définition :

La section d'une sphère par un plan est un cercle, appelé cercle de section. La droite qui joint le centre du cercle de section et le centre de la sphère est perpendiculaire au plan de section.



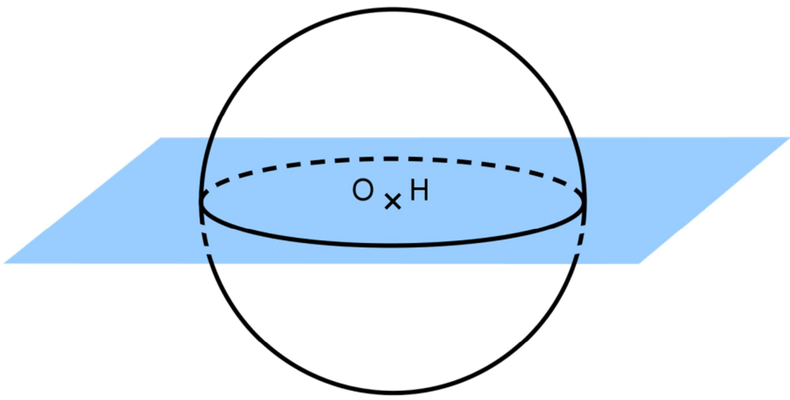
Sur la figure ci-dessus, O est le centre de la sphère et H le centre du cercle de section :

- (OH) est perpendiculaire à (AH)
- **OH est appelée la distance de O au plan P**

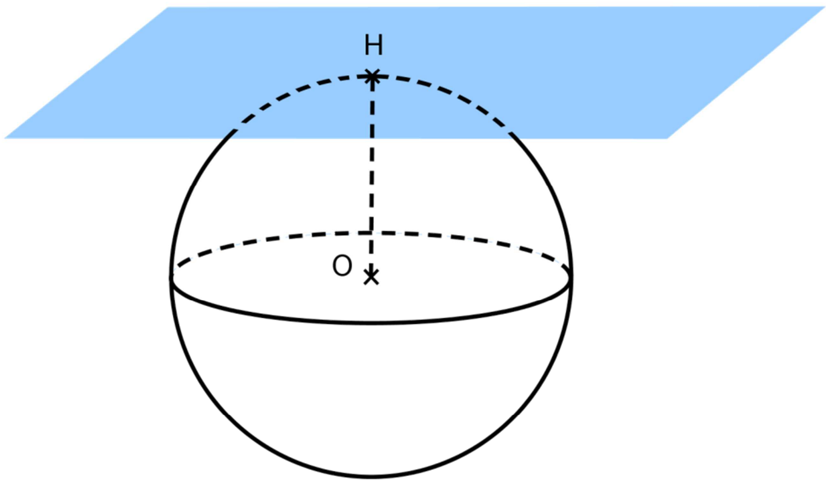
b) Cas particuliers :

1er cas :

Si la distance OH est égale à 0 alors la section de la sphère par le plan est un grand cercle.

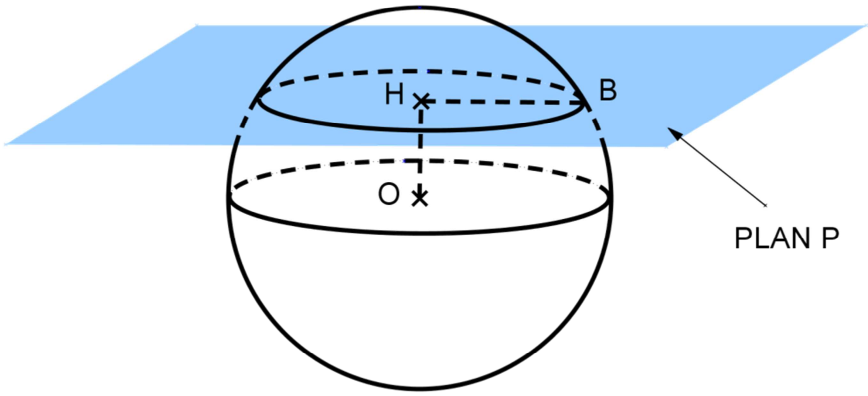


2ème cas :
Si la distance OH est égale au rayon de la sphère alors l'intersection de la sphère et du plan est l'unique point H. **On dit que le plan est tangent à la sphère.**

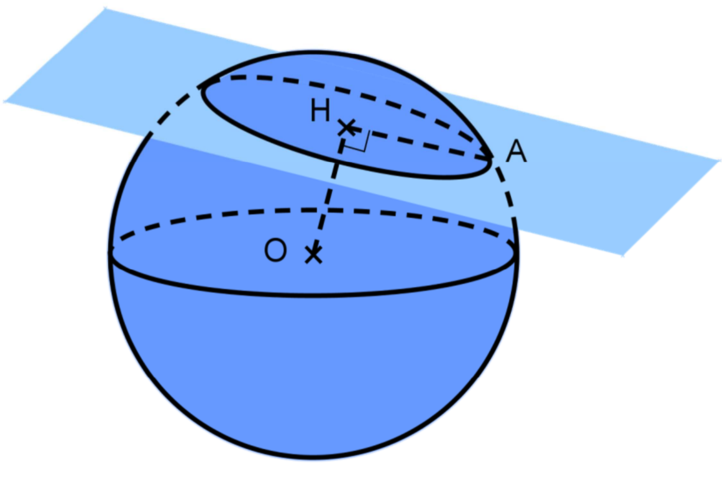


c) Calcul du rayon du cercle de section :

Une sphère de centre O et de rayon 5 cm est sectionnée par un plan P.
Le point H est le centre du cercle de section.
On sait que $OH = 3\,\text{cm}$.
On se propose de calculer la distance HB, qui est le rayon du cercle de section.

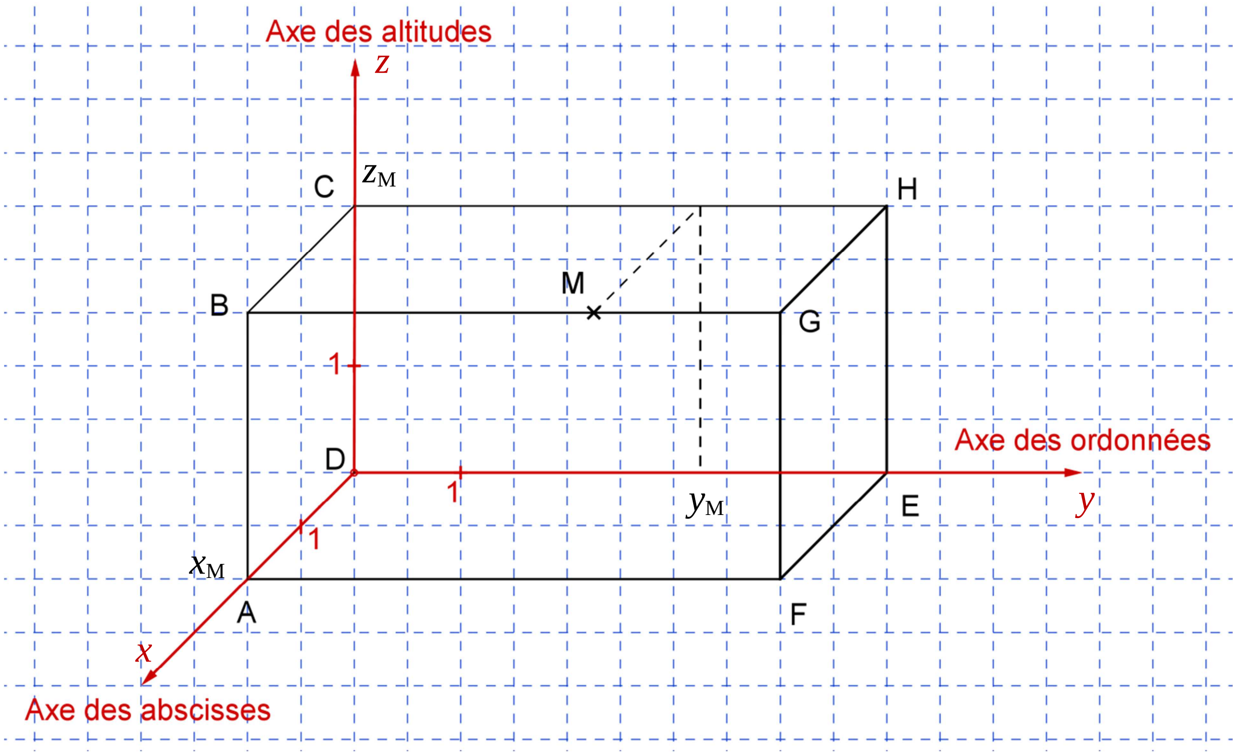


<u>Remarque :</u>
La section d'une boule par un plan est un disque.



III) Repérage sur parallélépipède rectangle :

Pour repérer un point d'un parallélépipède rectangle, on peut utiliser un sommet du parallélépipède et les arêtes partant de ce sommet.



Le point M est repéré par trois nombres appelés les coordonnées de M :

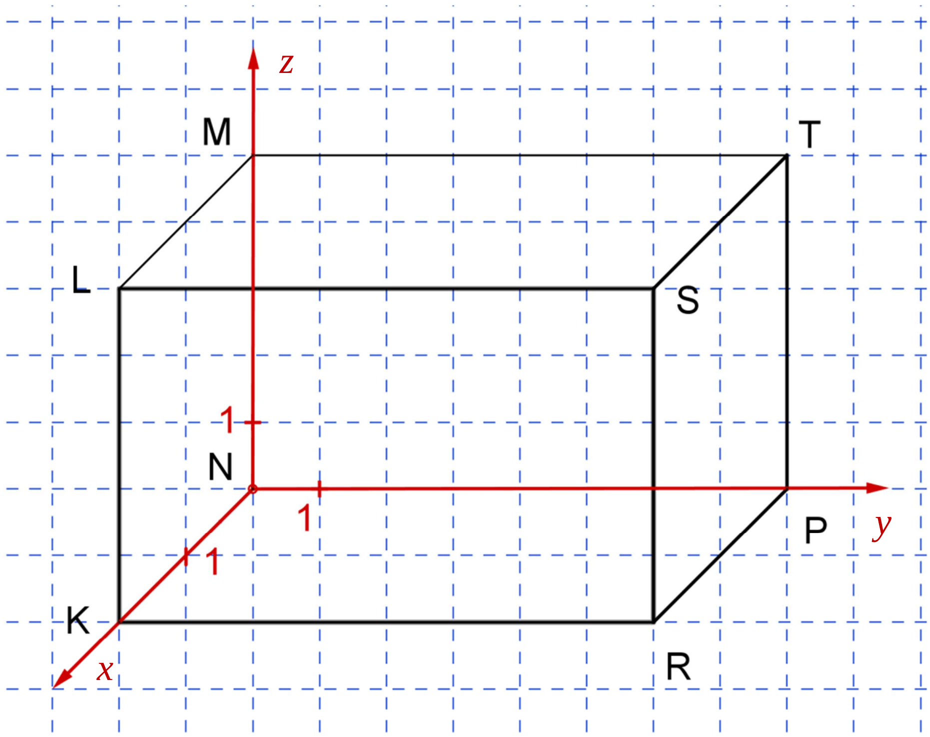
- **x_M est l'abscisse de M**
- **y_M est l'ordonnée de M**
- **z_M est l'altitude de M**

On note M (x_M ; y_M ; z_M).

Les coordonnées du sommet D sont (0 ; 0 ; 0).

La demi- droite [D*x*) est appelée l'axe des abscisses.
La demi- droite [D*y*) est appelée l'axe des ordonnées.
La demi- droite [D*z*) est appelée l'axe des altitudes.

Exemple :



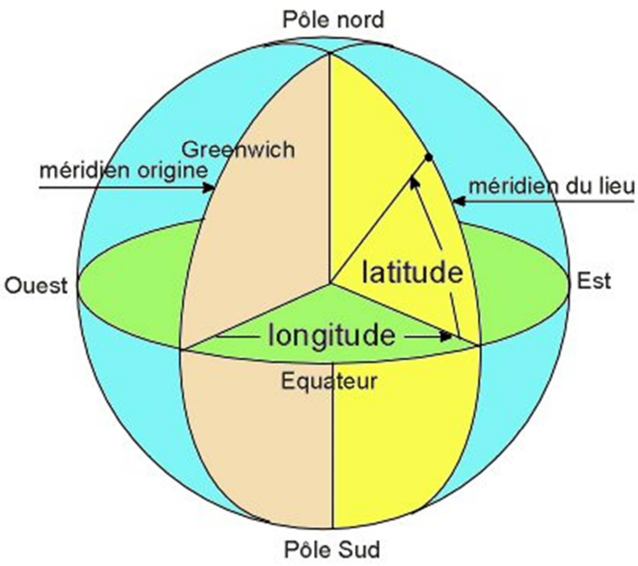
1) Donner les coordonnées de tous les sommets du parallélépipède rectangle.

2) Placer, sur la figure, les points suivants dont on donne les coordonnées :

- A (0 ; 4 ; 5)
- B (2 ; 7 ; 0)
- C (1 ; 0 ; 5)
- D (2 ; 6 ; 5)
- E (1 ; 8 ; 5)

IV) Repérage sur une sphère :

Pour repérer un point à la surface du globe terrestre, on utilise deux coordonnées géographiques : la longitude et la latitude.



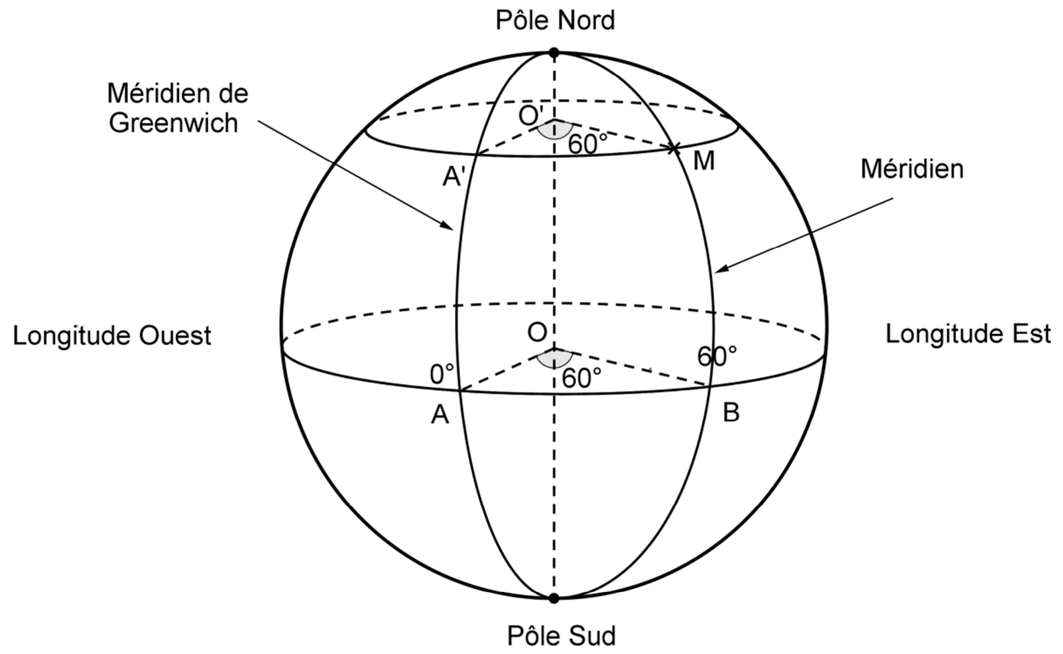
1) Longitude et méridien :

Un méridien est un demi- grand cercle imaginaire du globe terrestre reliant les pôles géographiques.

Pôle Nord

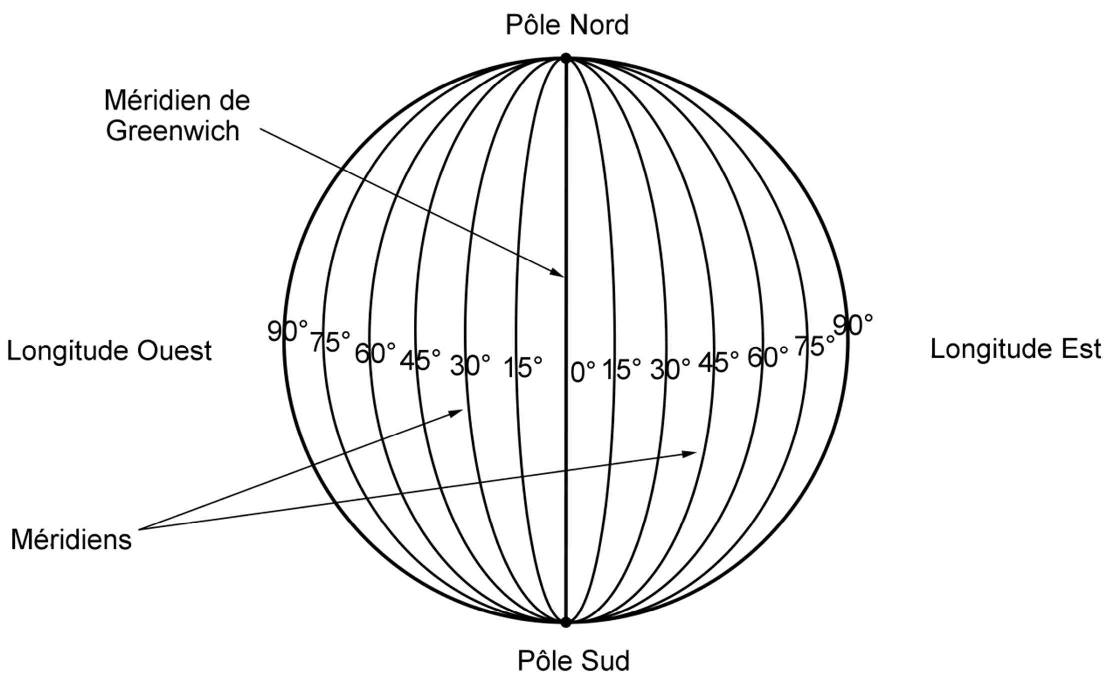
Pôle Sud

La longitude est une coordonnée géographique représentée par une valeur angulaire, expression de la position Est-Ouest d'un point sur la Terre (ou sur une autre sphère).
La longitude d'origine (0°) sur la Terre est le méridien de Greenwich (GB).



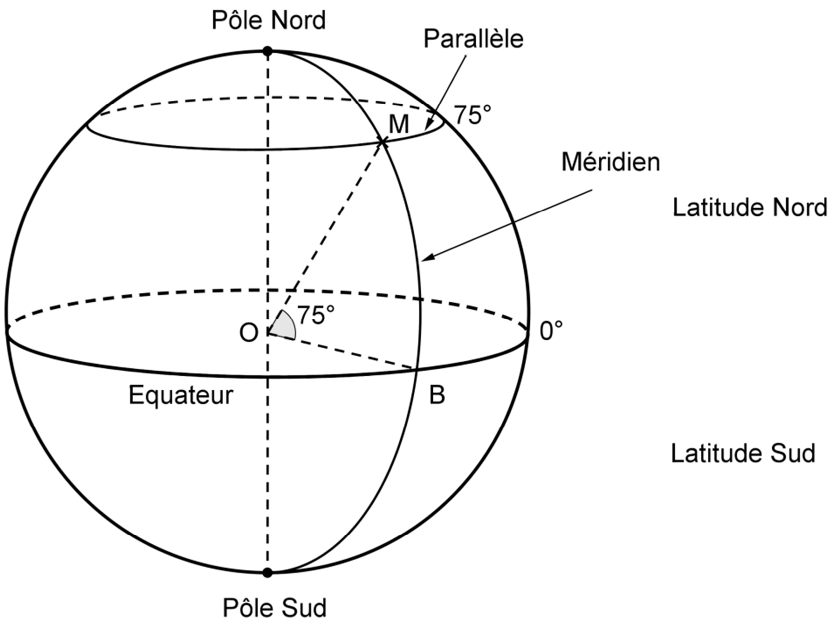
La longitude du point M est représentée sur la figure précédente par la mesure des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'O'M}$ où le point O est le centre de la Terre.

Remarque :
Tous les points de la Terre situés sur un même méridien ont la même longitude.



2) Latitude et parallèle :

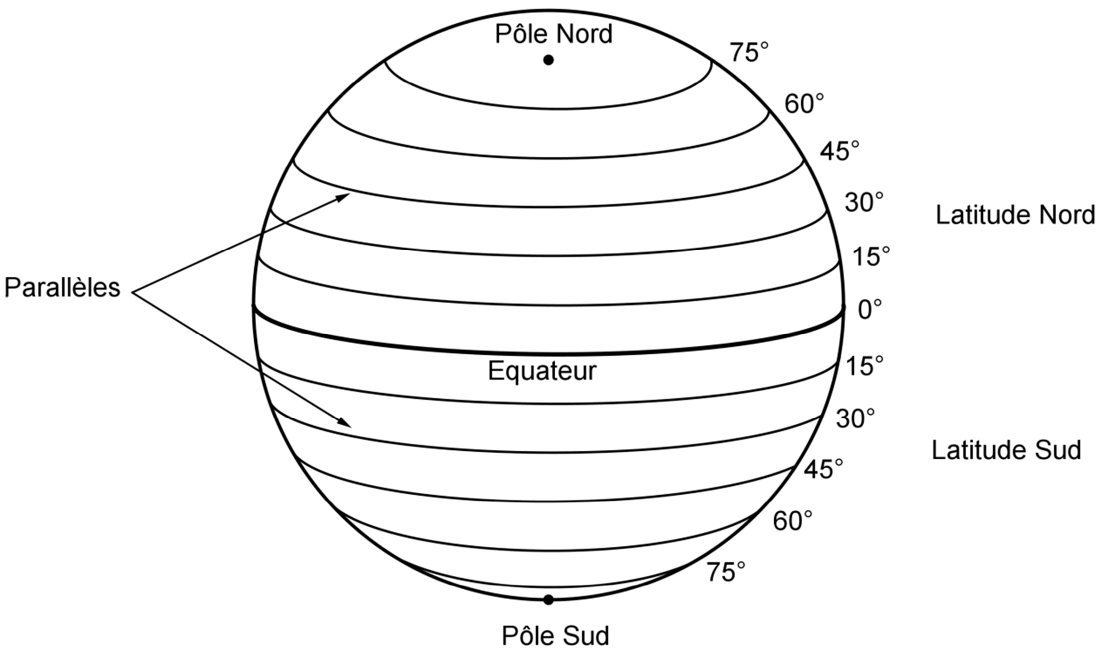
La latitude est une coordonnée géographique représentée par une valeur angulaire, expression de la position d'un point sur la Terre, au nord ou au sud de l'équateur qui représente la latitude d'origine (0°).



La latitude du point M est représentée sur la figure précédente par la mesure de l'angle $\widehat{BOM}$ où le point O est le centre de la Terre.

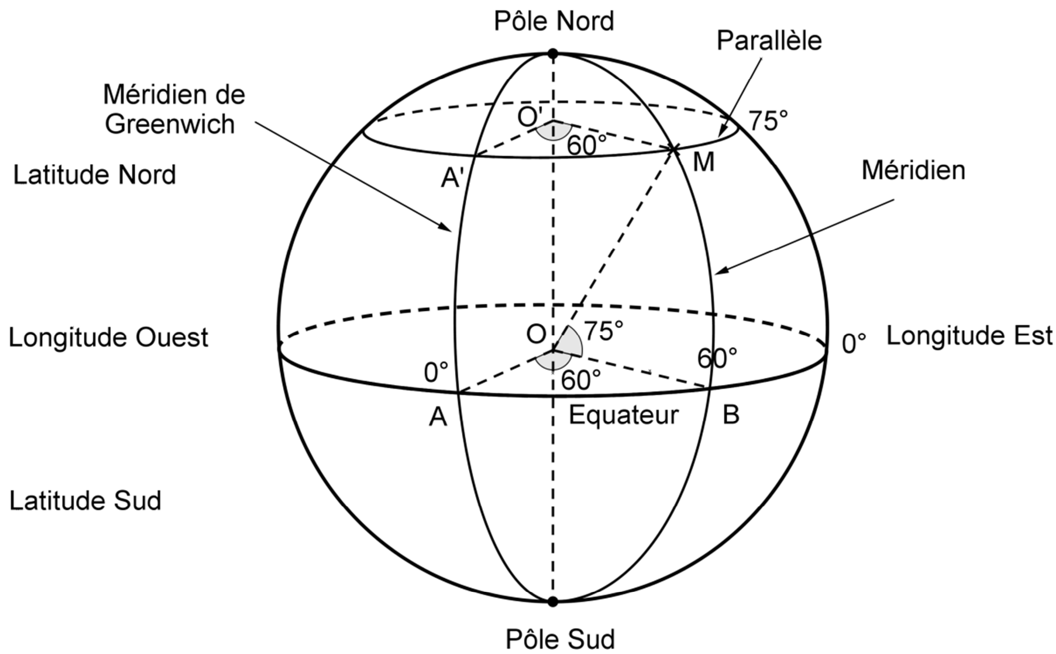
Remarque :

Tous les points de la Terre, ayant une même latitude, forment un cercle imaginaire obtenu en sectionnant la Terre par un plan parallèle à celui de l'équateur : ce cercle est appelé un parallèle.

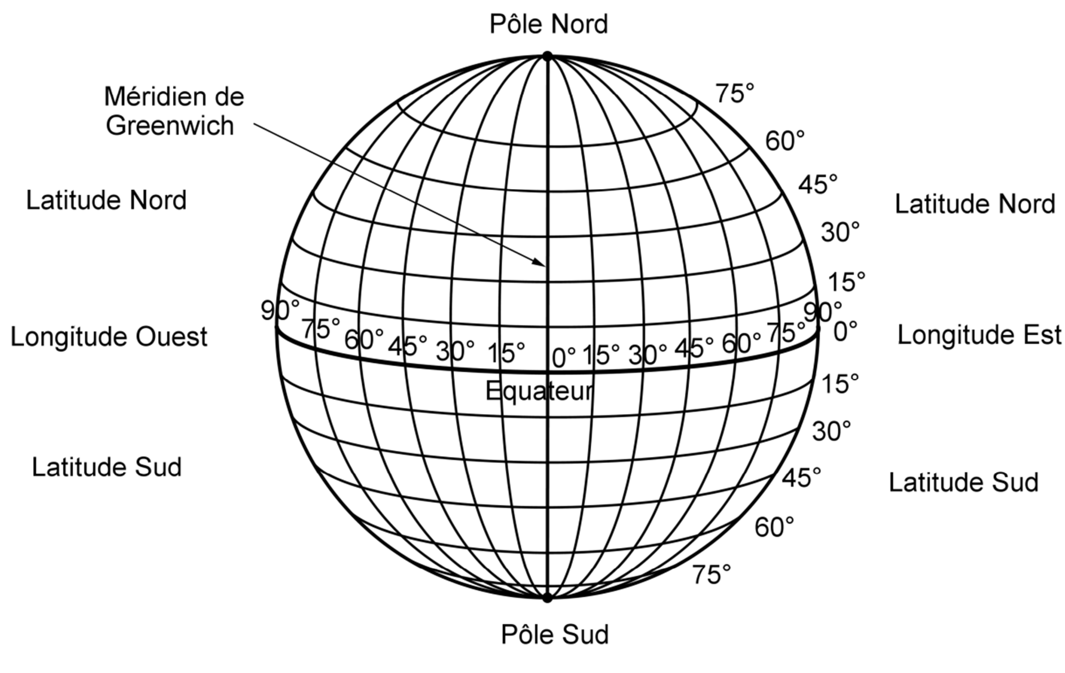


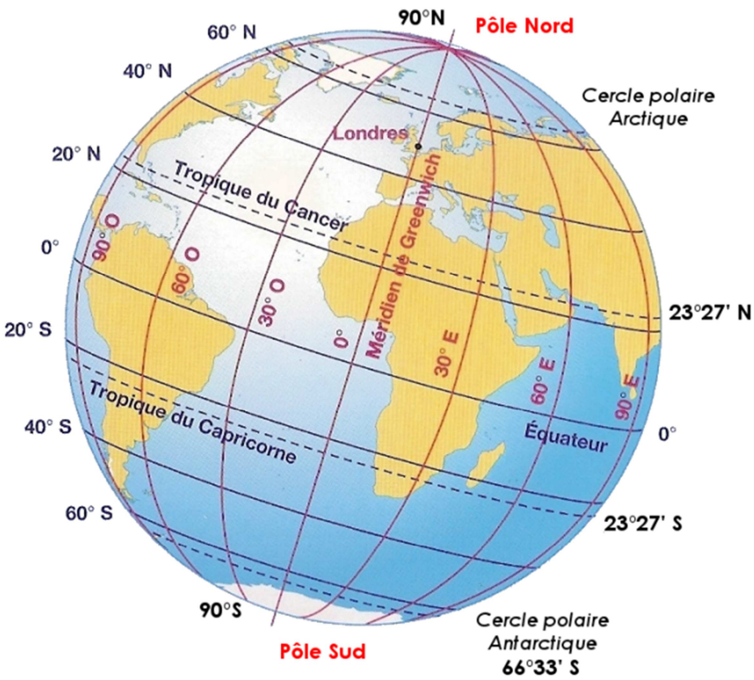
3) Repérage sur une sphère :

On peut donc positionner parfaitement un point sur la surface de la Terre connaissant sa longitude et sa latitude.

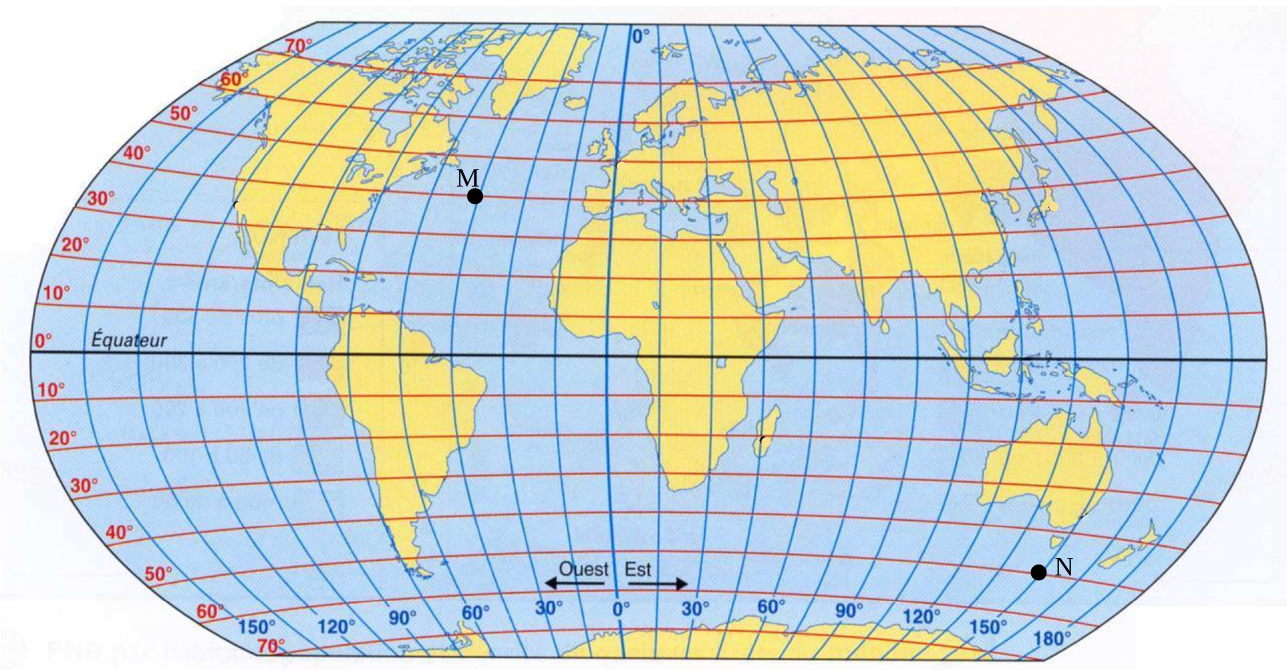


Le point M se situe à l'intersection du 75ème parallèle-nord ($\widehat{BOM} = 75°$) et du 60ème méridien-est ($\widehat{AOB} = 60°$).





Exemple :



1) Déterminer les coordonnées géographiques des points M et N.
2) Positionner le point R de longitude : 120° Ouest et de latitude : 20° Sud.
3) Positionner le point S, intersection du 30ème parallèle-nord et du 75ème méridien-est.

V) Volume d'un solide de l'espace :

- **Volume d'un parallélépipède rectangle (ou pavé droit)**

  Volume = longueur × largeur × hauteur

- **Volume d'un prisme droit**

  Volume = aire de la base × hauteur

- **Volume d'un cylindre**

  Volume = aire du disque de base × hauteur

- **Volume d'une pyramide**

  Volume = $\frac{1}{3}$ × aire de la base × hauteur

- **Volume d'un cône**

  Volume = $\frac{1}{3}$ × aire du disque de base × hauteur

- **Volume d'une boule de rayon r est**

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Exemple :
On considère une boule de rayon 10 cm.

Calculer le volume de cette boule.
Puis donner la troncature au dixième de ce volume.