ARITHMETIQUE ET ECRITURE FRACTIONNAIRE

I) Définitions :

1) Multiple et diviseur :

Soit a et b deux nombres entiers naturels, tels que

$$a = b \times k \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = k \quad \text{avec } b \text{ non nul}$$

où k est un nombre entier naturel

On dit que

a est un multiple de b

b est un diviseur de a

Remarque :

a est aussi un multiple de k .

Si l'entier naturel k est non nul, c'est aussi un diviseur de a.

Exemple :

143 est-il un multiple de 11 ?

$143 : 11 = 13$

Donc 143 est un multiple de 11 (et aussi de 13).

11 et 13 sont des diviseurs de 143.

362 est-il divisible par 16 ?

$362 : 16 = 22{,}625$ 22,625 n'est pas un nombre entier

donc 16 n'est pas un diviseur de 362. 362 n'est pas un multiple de 16.

Rappel : Critères de divisibilité

Nombre divisible par 2 :

Nombre divisible par 3 :

Nombre divisible par 5 :

Nombre divisible par 9 :

Remarques :

0 est un multiple de tout nombre entier naturel b car $0 = b \times 0$.

Tout nombre entier naturel non nul a une infinité de multiples.

Multiples de 4 : 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44 ……..

0 a un seul multiple : 0

Tout nombre entier naturel, strictement supérieur à 1, a au moins de deux diviseurs 1 et lui-même.

0 a une infinité de diviseurs : tous les nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

2) Division euclidienne :

Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver deux nombres entiers naturels q et r tels que $a = b \times q + r$ avec $r < b$.
q est le quotient et r est le reste de la division euclidienne.

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

Exemple :

$$\begin{array}{c|c} 217 & 3 \\ \hline 1 & 72 \end{array}$$

Donc $\underbrace{217}_{\text{dividende}} = \overbrace{3}^{\text{diviseur}} \times \underbrace{72}_{\text{quotient}} + \overbrace{1}^{\text{reste}}$

Remarques :

Si $r = 0$, b est un diviseur de a.

Si le reste est aussi strictement inférieur au quotient, on peut intervertir le quotient et le diviseur.

Déterminer le quotient et le reste de la division de 89 par 7.

II) Nombres premiers :

1) Définition:

Un nombre premier est un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs 1 et lui-même.

Exemple :

Les nombres suivants sont-ils des nombres premiers ? Justifier.

a) 25 b) 31 c) 258 d) 0 e) 1

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

Remarque:

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2.

Si aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ divise n, alors n est un nombre premier.

223 est-il un nombre premier ? Justifier.

2) Propriété:

Tout nombre entier positif, strictement supérieur à 1, peut s'écrire comme produit de facteurs premiers.

Méthode:

Ecrire 588 sous la forme d'un produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 588 & 2 \\ 294 & 2 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

donc $588 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7^2$

Exemple:

Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers :

a) 485 b) 2088 c) 3185

3) Algorithme permettant de décomposer un nombre en produit de facteurs premiers:

III) Fraction irréductible :

1) Définition:

Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont que 1 comme diviseur en commun.

Exemple:

Les fractions suivantes sont-elles irréductibles ? si non, les rendre irréductibles.

a) $\frac{14}{9}$ b) $\frac{35}{15}$

2) Méthodes pour rendre une fraction irréductible:

a) Première méthode :

Rendons la fraction $\frac{42}{54}$ irréductible.

On recherche un diviseur commun de 42 et 54 : 2

$$\frac{42}{54} = \frac{42:2}{54:2} = \frac{21}{27}$$

On recherche un diviseur commun de 21 et 27 : 3

$$\frac{21}{27} = \frac{21:3}{27:3} = \frac{7}{9}$$

Donc $\frac{42}{54} = \frac{7}{9}$.

b) Deuxième méthode :

Rendons la fraction $\frac{270}{126}$ irréductible.

Décomposons 270 et 126 en produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^3 \times 5$ $\qquad$ $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2 \times 3^2 \times 7$

Donc $\frac{270}{126} = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 7}$

Simplifions maintenant

$$\frac{270}{126} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3 \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 7} = \frac{3 \times 5}{7} = \frac{15}{7}$$

Exemples:
Rendre les fractions suivantes irréductibles.

a) $\frac{240}{72}$ $\qquad$ b) $\frac{108}{207}$ $\qquad$ c) $\frac{92}{27}$

IV) Opérations sur les fractions :

1) Rappels sur les opérations sur les fractions:

Schéma

2) Exemple:

Calculer les expressions suivantes et mettre le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{11}{3} - \frac{9}{2} \qquad B = \frac{3}{7} \times \frac{5}{2} - \frac{9}{4} : \frac{7}{6}$$

$$C = 12 - \frac{3}{2} \times \left(\frac{8}{5} - \frac{1}{2}\right) \qquad D = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{6}}{\frac{5}{8} + \frac{13}{3}}$$

Correction :

$$A = \frac{11}{3} - \frac{9}{2} = \frac{11 \times 2}{3 \times 2} - \frac{9 \times 3}{2 \times 3} = \frac{22}{6} - \frac{27}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$B = \frac{3}{7} \times \frac{5}{2} - \frac{9}{4} : \frac{7}{6} = \frac{3 \times 5}{7 \times 2} - \frac{9}{4} \times \frac{6}{7} = \frac{15}{14} - \frac{9 \times 6}{4 \times 7} = \frac{15}{14} - \frac{54}{28} = \frac{15 \times 2}{14 \times 2} - \frac{54}{28} = \frac{30}{28} - \frac{54}{28}$$

$$B = -\frac{24}{28} = -\frac{24 : 4}{28 : 4} = -\frac{6}{7}$$

$$C = 12 - \frac{3}{2} \times \left(\frac{8}{5} - \frac{1}{2}\right) = 12 - \frac{3}{2} \times \left(\frac{8 \times 2}{5 \times 2} - \frac{1 \times 5}{2 \times 5}\right) = 12 - \frac{3}{2} \times \left(\frac{16}{10} - \frac{5}{10}\right) = 12 - \frac{3}{2} \times \frac{11}{10}$$

$$C = 12 - \frac{3}{2} \times \frac{11}{10} = 12 - \frac{3 \times 11}{2 \times 10} = 12 - \frac{33}{20} = \frac{12 \times 20}{20} - \frac{33}{20} = \frac{240}{20} - \frac{33}{20} = \frac{207}{20}$$

$$D=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}{\frac{5}{8}+\frac{13}{3}}=\frac{\frac{3\times3}{4\times3}-\frac{1\times2}{6\times2}}{\frac{5\times3}{8\times3}+\frac{13\times8}{3\times8}}=\frac{\frac{9}{12}-\frac{2}{12}}{\frac{15}{24}+\frac{104}{24}}=\frac{\frac{7}{12}}{\frac{119}{24}}=\frac{7}{12}\times\frac{24}{119}=\frac{7\times2\times12}{12\times119}=\frac{14}{119}$$

$$D=\frac{2\times\cancel{7}}{\cancel{7}\times17}=\frac{2}{17}$$

V) Application des fractions au ratio :

1) Ratio de deux grandeurs :

a) Définition :

Le ratio de deux grandeurs est égal au quotient de ces deux grandeurs.

b) Exemples :

- Pour un téléviseur $\frac{16}{9}$ ou 16:9, le ratio longueur : largeur est égale à $\frac{16}{9}$.

  Calculer la largeur d'un téléviseur $\frac{16}{9}$ de longueur 1,2 mètre.

- Sur une carte typographique d'échelle 1/1000 ou 1:1000, le ratio distance mesurée : distance réelle est égale à $\frac{1}{1000}$.

  Calculer la distance, sur cette carte, correspondant à une distance réelle de 25 m.

2) Nombres dans un ratio :

a) Définition :

On dit que deux nombres a et b sont dans le ratio $2 : 3$ si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$.

On dit que trois nombres a, b et c sont dans le ratio $2 : 3 : 7$ si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$.

b) Exemples :

1) Les nombres 8 et 9 sont-ils dans le ratio 6:7 ? Justifier.
2) Les trois nombres 18 , 27 et 40,5 sont-ils dans le ratio 4:6:9 ? Justifier.
3) Déterminer le nombre a tel que a et 5 soient dans le ratio 7:10.

c) Méthode :

Recherchons trois nombres a, b et c qui sont dans le ratio 2:3:4 tels que leur somme soit égale à 306.

Calculons $2 + 3 + 4 = 9$.

$$a = 306 \times \frac{2}{9} = \frac{306 \times 2}{9} = 68$$

$$b = 306 \times \frac{3}{9} = \frac{306 \times 3}{9} = 102$$

$$c = 306 \times \frac{4}{9} = \frac{306 \times 4}{9} = 136$$

d) Exemples :

- Déterminer la mesure de chaque angle aigu d'un triangle rectangle dans le ratio 4:11.

- Déterminer les mesures des angles d'un triangle, dans le ratio 3:5:12.