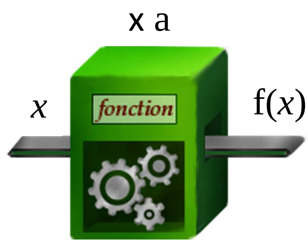
LES FONCTIONS LINEAIRES ET AFFINES

I) Les fonctions linéaires :

1) Activité:

2) Définition :

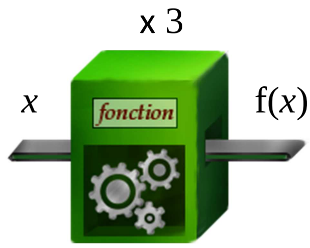
Une fonction linéaire f est une fonction définie par $f(x) = ax$
(ou $f : x \longmapsto ax$)
où a est un nombre réel et x est la variable
a est appelé le coefficient, c'est aussi le taux d'accroissement.



Exemple :

Soit f la fonction linéaire définie par $f(x) = 3x$.

a) Quel est le coefficient ?
b) Calculer $f(-1)$.
c) Déterminer l'image de 2.
d) Déterminer l'antécédent de -6.



3) Propriété :

Dire qu'une fonction est linéaire revient à dire que les images sont proportionnelles aux antécédents.

Exemple :

Soit g la fonction linéaire de coefficient -2.
Donc $g(x) = -2x$

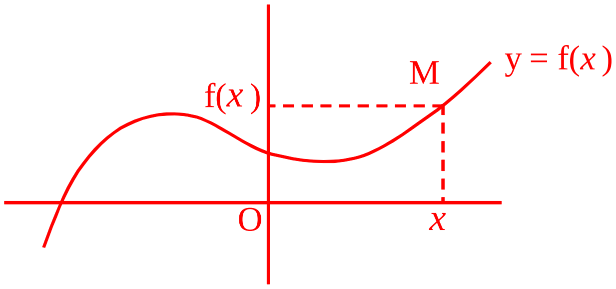
x	-5	0	1	2
$g(x)$	10	0	-2	-4

x (-2)

4) Représentation graphique :

A) Définition :

La représentation graphique d'une fonction f est l'ensemble des points du plan de coordonnées (x ; f(x)).



y = f(x) est appelée l'équation de la représentation graphique de la fonction f .

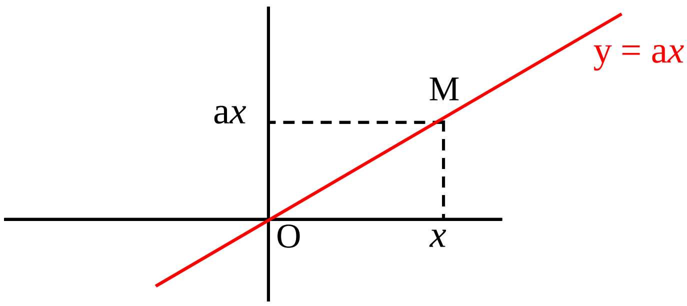
B) Propriété :

Soit f une fonction linéaire définie par f(x) = ax.

La représentation graphique de la fonction f est une droite qui passe par l'origine du repère.

Les coordonnées (x ; y) de tout point M de cette droite vérifient l'égalité y = ax.

y = ax est appelée l'équation réduite de la droite, a est appelé le coefficient directeur de la droite.



Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = -x$.

1) Quelle est la nature de la représentation graphique $\mathcal{D}$ de la fonction f ? Justifier.
2) Donner son équation réduite.
3) Donner le coefficient directeur de $\mathcal{D}$.
4) Déterminer l'ordonnée du point A de $\mathcal{D}$ d'abscisse 4.
5) Déterminer l'abscisse du point B de $\mathcal{D}$ d'ordonnée 2.
6) Construire A, B et $\mathcal{D}$.

Echelle : en abscisse 1 carreau ↔ 1 unité
en ordonnée 1 carreau ↔ 1 unité

Remarques :
Pour construire une droite, on a besoin de deux points, en pratique, on en prend trois.

Vocabulaire :

fonction linéaire	représentation graphique (droite)
expression littérale $f(x) = ax$	équation réduite $y = ax$
coefficient ou taux d'accroissement a	coefficient directeur a
x : antécédent $f(x)$: image	x : abscisse y : ordonnée

5) Calcul du taux d'accroissement et du coefficient directeur :

A) Calcul du coefficient ou taux d'accroissement :

Soit f une fonction linéaire définie par $f(x) = ax$.

Soit $f(x_1)$ l'image de x_1 par f tel que $x_1 \neq 0$

Le coefficient a est égal à

$$a = \frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{\text{image de } x_1}{x_1}$$

Exemple :

Soit f une fonction linéaire tel que par f l'image de 3 est 7,5.

1) Calculer le coefficient de f .
2) En déduire l'expression de $f(x)$.

B) Calcul du coefficient directeur :

Soit f une fonction linéaire définie par $f(x) = ax$.

L'équation réduite de la représentation graphique $\mathcal{D}$ de f est $y = ax$.

Soit $A(x_A\ ;\ y_A)$ un point de $\mathcal{D}$ tel que $x_A \neq 0$

Le coefficient directeur a de $\mathcal{D}$ est égal à

$$a = \frac{y_A}{x_A} = \frac{\text{ordonnée de A}}{\text{abscisse de A}}$$

Exemples :

1) La représentation graphique $\mathcal{D}$ d'une fonction linéaire f passe par le point $M(2\ ;\ -1)$.
   a) Construire le point M puis la droite $\mathcal{D}$.

      Echelle : en abscisse 1 carreau ↔ 1 unité
      en ordonnée 1 carreau ↔ 1 unité
   b) Calculer le coefficient directeur de $\mathcal{D}$.
   c) Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{D}$.
   d) En déduire l'expression de $f(x)$.

2) Exemples graphiques

2) Définition :

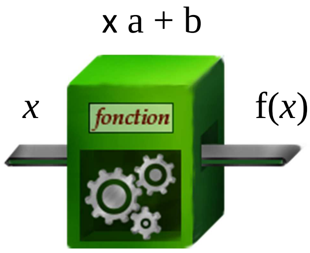
Une fonction affine f est une fonction définie par f(x) = ax + b

(ou f : $x \longmapsto$ ax + b)

où a et b sont des nombres réels et x est la variable

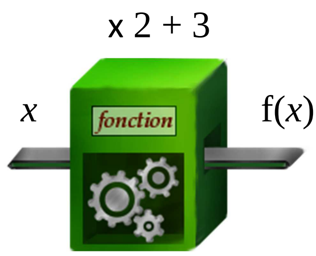
a et b sont appelés les coefficients

a est le taux d'accroissement.



Exemple :

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 2x + 3$.



a) Quels sont les coefficients ?
   Quel est le taux d'accroissement ?
b) Déterminer l'image de –4.
c) Déterminer l'antécédent de 5 .
d) Calculer $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Remarque:

Une fonction linéaire est une fonction affine avec b = 0 .

3) Calcul des coefficients:

A) Taux d'accroissement :

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

Soit $f(x_1)$ l'image de x_1 par f et $f(x_2)$ l'image de x_2 par f tel que $x_2 \neq x_1$

Le coefficient a est égal à

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\text{image de } x_2 - \text{image de } x_1}{x_2 - x_1}$$

B) Exemple :

Soit f une fonction affine tel que par f l'image de 2 est 1 et l'image de –1 est –8.

1) Calculer le coefficient a .
2) Calculer le coefficient b .
3) En déduire l'expression de $f(x)$.
4) Calculer l'image de –3.

4) Représentation graphique :

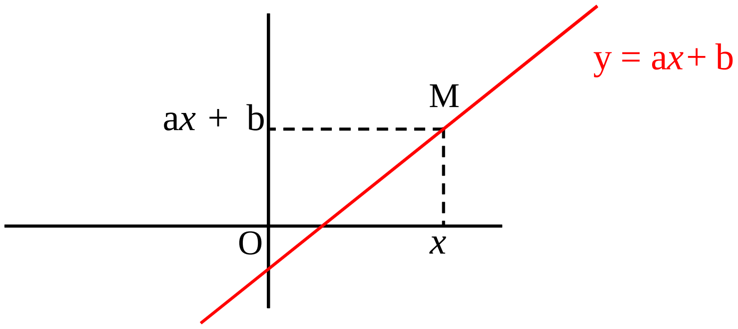
A) Propriété :

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

La représentation graphique de la fonction f est une droite.

Les coordonnées (x ; y) de tout point M de cette droite vérifient l'égalité $y = ax + b$.

$y = ax + b$ est appelée l'équation réduite de la droite, a est appelé le coefficient directeur de la droite et b est appelé l'ordonnée à l'origine.



Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - 2$.

1) Donner l'équation réduite de la représentation graphique $\mathcal{D}$ de la fonction f .
2) Donner le coefficient directeur de $\mathcal{D}$.
3) Donner l'ordonnée à l'origine de $\mathcal{D}$.
4) Déterminer l'ordonnée du point A de $\mathcal{D}$ d'abscisse 5.
5) Déterminer l'abscisse du point B de $\mathcal{D}$ d'ordonnée –3.
6) Construire A, B et $\mathcal{D}$.

Echelle : en abscisse 1 carreau ↔ 1 unité
en ordonnée 1 carreau ↔ 1 unité

5) Calcul du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine :

A) Calcul du coefficient directeur :

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

L'équation réduite de la représentation graphique $\mathcal{D}$ de f est $y = ax + b$.

Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points distincts de $\mathcal{D}$

Le coefficient directeur a de $\mathcal{D}$ est égal à

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{ordonnée de B} - \text{ordonnée de A}}{\text{abscisse de B} - \text{abscisse de A}}$$

B) Exemple :

La représentation graphique $\mathcal{D}$ d'une fonction affine f passe par les points $M(1 ; 3)$ et $N(2 ; -1)$.

a) Construire les points M et N puis la droite $\mathcal{D}$.

Echelle : en abscisse 1 carreau ↔ 1 unité

en ordonnée 1 carreau ↔ 1 unité

b) Calculer le coefficient directeur de $\mathcal{D}$.

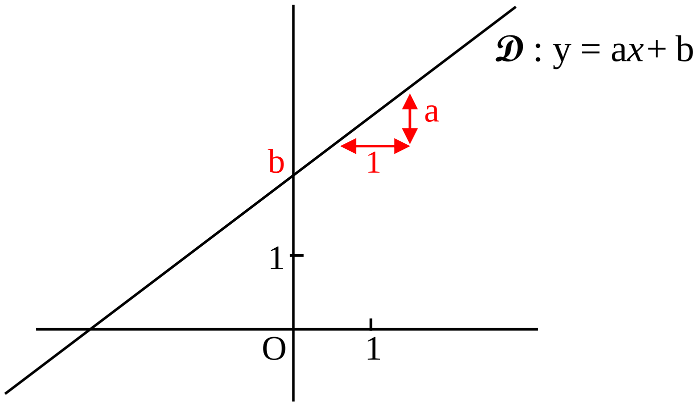
c) Calculer l'ordonnée à l'origine de $\mathcal{D}$.

d) Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{D}$.

e) En déduire l'expression de $f(x)$.

6) Interprétation graphique du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine :

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
La représentation graphique $\mathcal{D}$ de f est une droite d'équation réduite $y = ax + b$.



Pour retrouver graphiquement le coefficient directeur :

On part d'un point de la droite, on avance d'une unité , on rejoint verticalement la droite : on trouve alors la valeur de a.
si on monte alors $a > 0$ et si on descend alors $a < 0$.

L'ordonnée à l'origine b est l'ordonnée du point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et de l'axe des ordonnées.

Exemples graphiques

III) Applications aux augmentations et aux diminutions :

1) Activité:

2) Propriété :

Une augmentation de n % correspond à une situation de proportionnalité de coefficient égal à $1+\frac{n}{100}$, c'est-à-dire à une fonction linéaire dont le taux d'accroissement est de $1+\frac{n}{100}$.

Une diminution de n % correspond à une situation de proportionnalité de coefficient égal à $1-\frac{n}{100}$, c'est-à-dire à une fonction linéaire dont le taux d'accroissement est de $1-\frac{n}{100}$.

Une augmentation de 12 % correspond à un taux d'accroissement de :

$$\text{taux} = 1 + \frac{12}{100} = 1{,}12$$

Une diminution de 7 % correspond à un taux d'accroissement de :

$$\text{taux} = 1 - \frac{7}{100} = 0{,}93$$

$$\boxed{\text{valeur initiale x taux d'accroissement} = \text{valeur après augmentation ou diminution}}$$

3) Exemples :

a) A 12 ans, un enfant mesurait 1,50 m. Sa taille a augmenté de 4 % entre 12 et 13 ans.
Quelle est la taille de l'enfant à 13 ans ?

b) La consommation en électricité d'un ménage a augmenté de 10 % cette année en raison d'un appareil défectueux. Elle est de 5874 kwh.
Quelle était la consommation en électricité du ménage avant l'augmentation ?

c) Le propriétaire d’une habitation consommait 3500 litres de fioul par an pour le chauffage. Il a effectué des travaux d’isolation.
Sa consommation a diminué de 25 %.
Combien consomme-t-il de fioul actuellement ?

d) Le prix d’un article est de 143,52€ TTC.
Quel est le prix hors taxe de cet article sachant que la TVA qui lui est appliqué est au taux de 19,6% ?

e) Un élève de troisième a obtenu au premier trimestre une moyenne générale de 13,6 sur 20.
Il a obtenu au second trimestre une moyenne de 11,7 sur 20 et au troisième trimestre, sa moyenne est remontée à 13,6 sur 20.

Quel a été le pourcentage de diminution de sa moyenne entre les deux premiers trimestre ?
Quel a été le pourcentage d’augmentation de sa moyenne entre le second et le troisième trimestre ?
Que constatez-vous ?